

# Über die Länge von Kettenbrüchen mit ungeraden Teilnennern

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 32, 1981,  
S.51-53



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## Über die Länge von Kettenbrüchen mit ungeraden Teilnennern

Von **G.J. Rieger**, Hannover

Vorgelegt von Theodor Kaluza

(eingegangen am 18.5.1981)

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganzrationale Zahlen.

Zu  $w \geq v > 0$  gibt es eindeutig bestimmte  $a, r$  mit

$$w = av + r, \quad 2/a, -v < r \leq v.$$

Durch wiederholte Anwendung findet man: Zu  $r_0 \geq r_1 > 0$  gibt es eindeutig bestimmte  $n > 0$ ,  $a_j, e_j \in \{-1, 1\}$ ,  $r_j > 0$  ( $0 < j \leq n$ ),  $r_{n+1} := 0$  mit

$$r_{j-1} = a_j r_j + e_j r_{j+1}, \quad 2/a_j, -r_j < e_j r_{j+1} \leq r_j, \quad a_j + e_j > 0 \quad (0 < j \leq n);$$

für  $n > 1$  ist darin noch  $e_{n-1} + a_n > 0$ . Es sei

$$(1) \quad U(r_0, r_1) := n.$$

Es ist  $r_n = (r_0, r_1)$ , und man spricht hier vom ungeraden Algorithmus zur Bestimmung von  $(r_0, r_1)$ . Einsetzen gibt

$$(2) \quad \frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{a_1 + \frac{e_1}{a_2 + \frac{e_2}{a_3 + \dots + \frac{e_{n-1}}{a_n}}}},$$

und man nennt (2) die Darstellung von  $\frac{r_1}{r_0}$  durch einen Kettenbruch mit ungeraden Teilnennern. Solche Kettenbrüche sind halbbregelmäßig (vgl. etwa [2], § 39).

Es sei  $G := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Es bezeichne  $\varphi$  die Funktion von Euler. In [4] wurde bewiesen

$$\sum_{\substack{0 < v < w \\ (v, w) = 1}} U(w, v) = 18\pi^{-2} (\log G) \varphi(w) \log w + O(w(\log \log w)^3) \quad (w > 2).$$

Das Ziel dieser Arbeit ist ein Beweis von

**Satz 1.** *Es gibt reelle, explizit angebbare Zahlen  $\tau > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  derart, daß für jedes  $x > 2$  die Anzahl der Paare  $v, w$  mit  $0 < v < w \leq x$ , welche*

$$\tau \log w < U(w, v) \leq \frac{\log(w\sqrt{5})}{\log G} \quad \text{nicht erfüllen, kleiner ist als } \alpha x^{2-\beta}.$$

Demnach ist also  $U(w, v)$  meist von der Größenordnung  $\log w$ .

Wir betrachten die unendliche Folge

$$A = (a_1, e_1, a_2, e_2, a_3, e_3, \dots)$$

mit  $2 \nmid a_j, e_j \in \{-1, 1\}, a_j + e_j > 0$  ( $j > 0$ ) und die davon hergeleitete Folge  $\{q_0, q_1, q_2, \dots\}$  mit  $q_0 := 1, q_1 := a_1, q_n := a_n q_{n-1} + e_{n-1} q_{n-2}$  ( $n > 1$ ). Der Vergleich mit (2) liefert

$$(3) \quad r_0 = q_n.$$

Nach dem Vorbild von Fibonacci definieren wir  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  vermöge  $f_0 := 1, f_1 := 1, f_n - f_{n-1} - f_{n-2} := 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Es ist

$$(4) \quad f_n = \frac{G^{n+1} + (-1)^n G^{-n-1}}{G + G^{-1}} > \frac{G^n}{\sqrt{5}} \quad (n \geq 0).$$

**Hilfssatz 1.** Für die Folge  $A$  gilt  $q_n \geq f_n$  ( $n \geq 0$ ).

**Beweis.** Für  $n = 0$  und  $n = 1$  ist das klar. Es sei  $n > 1$ . Durch Induktion nach  $k$  beweisen wir zunächst

$$(5) \quad q_n \geq f_k q_{n-k} + f_{k-1} e_{n-k} q_{n-k-1} \quad (0 < k < n).$$

Für  $k = 1$  ist das richtig wegen  $q_n = a_n q_{n-1} + e_{n-1} q_{n-2}$ . Es sei also (5) bereits bewiesen für  $0 < k < n-1$ . Dann genügt es zu zeigen

$$(6) \quad f_k q_{n-k} + f_{k-1} e_{n-k} q_{n-k-1} \geq f_{k+1} q_{n-k-1} + f_k e_{n-k-1} q_{n-k-2}.$$

Durch Einsetzen von  $q_{n-k} = a_{n-k} q_{n-k-1} + e_{n-k-1} q_{n-k-2}$  lautet (6) nach Division mit  $q_{n-k-1}$  jetzt

$$(7) \quad f_k a_{n-k} + f_{k-1} e_{n-k} \geq f_{k+1},$$

was wegen  $f_{k+1} := f_k + f_{k-1}$  und  $a_{n-k} + e_{n-k} > 1$  richtig ist. Aus (5) für  $k = n-1$  folgt wegen  $a_1 + e_1 > 1$  die Behauptung.

Ein anderer Beweis von Hilfssatz 1 findet sich in [5].

Aus (3), (1), Hilfssatz 1, (4) folgt

$$(8) \quad U(r_0, r_1) \leq \frac{\log(r_0 \sqrt{5})}{\log G} \quad (0 < r_1 \leq r_0).$$

Wir kehren jetzt den ungeraden Algorithmus um. Nach Vorgabe von  $n > 0, r_{n+1} = 0, r_n > 0$  und von  $a_j, e_j \in \{-1, 1\}$  mit  $2 \nmid a_j, a_j + e_j > 0$  ( $n \geq j > 0$ ) sei  $r_{j-1} := a_j r_j + e_j r_{j+1}$  ( $n \geq j > 1$ ). Dann sind  $r_1, r_0$  eindeutig bestimmt und erfüllen  $r_0 \geq r_1 > 0$ . Für  $e_n, e_{n-1}, \dots, e_1$  hat man höchstens  $2^n$  Möglichkeiten. Mit

$$b_j := \begin{cases} a_j & \text{falls } e_j = 1 \\ a_j - 1 & \text{falls } e_j = -1 \end{cases} \quad (n \geq j > 0)$$

gilt  $b_j > 0, r_{j-1} \geq b_j r_j$  ( $n \geq j > 0$ ) und daher

$$r_0 \geq b_1 b_2 \dots b_n r_n.$$

Für  $n > 0$ ,  $x > 1$  bezeichne  $L_n(x)$  die Anzahl der Paare  $v, w$  mit  $0 < v \leq w \leq x$  und  $U(w, v) = n$ . Mit  $r_0, r_1$  statt  $w, v$  folgt sofort

$$(9) \quad L_n(x) \leq 2^n \sum_{b_1 > 0, \dots, b_n > 0, r_n > 0} \dots \sum_{b_1 \dots b_n r_n \leq x} 1.$$

Für  $1 < \sigma \in \mathbb{R}$  sei  $\zeta(\sigma) := \sum_{b=1}^{\infty} b^{-\sigma}$ . Durch Multiplikation der rechten Seite von (9) mit  $x^\sigma (b_1 \dots b_n r_n)^{-\sigma}$  folgt

$$L_n(x) < x^\sigma (2\zeta(\sigma))^{n+1} \quad (1 < \sigma \in \mathbb{R}).$$

Für  $0 < \tau \in \mathbb{R}$  bezeichne  $S_\tau(x)$  die Anzahl der Paare  $v, w$  mit  $0 < v \leq w \leq x$  und  $U(w, v) \leq \tau \log w$ . Dann ist

$$S_\tau(x) \leq \sum_{0 < n \leq \tau \log x} L_n(x) < x^\sigma \frac{(2\zeta(\sigma))^{2+\tau \log x}}{2\zeta(\sigma) - 1}.$$

Wählt man  $\sigma$  hinreichend nahe an 1 und  $\tau$  hinreichend nahe an 0, erhält man daraus mit gewissen  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  sofort

$$(10) \quad S_\tau(x) < \alpha x^{2-\beta}.$$

Der **Beweis von Satz 1**, dessen Methode eine Weiterführung von [1] und von [3] ist, ergibt sich unmittelbar aus (10) und (8).

Wählt man etwa  $\sigma = \frac{3}{2}$  und  $\tau = \frac{1}{8}$ , so kann man wegen  $1 < \zeta(\frac{3}{2}) < 3$  in (10) und damit Satz 1 dazu  $\alpha = 36$  und  $\beta = \frac{1}{4}$  wählen.

### Literatur

- [1] J.D. Dixon, A simple estimate of the number of steps in the euclidean algorithm. Amer. Math. Soc. Monthly **78**, 374–376, 1971.
- [2] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. 3. Aufl., Stuttgart 1954.
- [3] G. J. Rieger, Über die Schrittzahl beim Algorithmus von Harris und dem nach nächsten Ganzen. Arch. d. Math. **34**, 421–427, 1980.
- [4] G.J. Rieger, Ein Heilbronn-Satz für Kettenbrüche mit ungeraden Teilnennern. Math. Nachr. (im Druck).
- [5] G. J. Rieger, Continued fractions and related algorithms. Proc. Conference Exeter 1980.